

На правах рукописи



**Петровский Константин Александрович**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОГО ОБОЛОЧЕЧНОГО  
СПЕКТРАЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И  
ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОЧНОСТНОГО  
АНАЛИЗА**

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Комсомольск-на-Амуре  
2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тулский государственный университет».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,  
профессор кафедры «Вычислительная механика»  
ФГБОУ ВО «МГУ им. М.В. Ломоносова»,  
Заслуженный деятель науки Российской Федерации  
**Левин Владимир Анатольевич**  
(г. Москва)

Официальные оппоненты: Член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой информатики и вычислительной  
математики, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический  
институт (государственный университет)»  
**Петров Игорь Борисович**  
(г. Москва)

кандидат технических наук,  
зав. лабораторией механики деформирования Института  
машиноведения и металлургии ДВО РАН  
**Прокудин Александр Николаевич**  
(г. Комсомольск-на-Амуре)

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный  
университет «МИФИ» (г. Москва)

Защита диссертации состоится «21» декабря 2017 г. в 14:00 на заседании  
диссертационного совета Д 999.055.04 при ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре  
государственный технический университет» по адресу: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр.  
Ленина, д.27, ауд. 201/3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке КНАГТУ и на сайте [www.knastu.ru](http://www.knastu.ru)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
канд.физ.-мат.наук, доцент



А.Ю. Лошманов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В последние десятилетия разработка эффективных вычислительных моделей для нелинейного анализа оболочек была одним из важнейших направлений в исследованиях. Частично это связано с необходимостью численного анализа новых материалов, таких как композитные и функционально градуированные оболочки, так как разработка новых конструкционных материалов требует создания адекватных математических моделей и расчетных комплексов на их основе для корректной численной оценки прочностных характеристик элементов конструкций из этих материалов. В частности, оболочки из ламинированных композитов по-прежнему представляют большой интерес во многих инженерных приложениях.

Некоторые математические модели напряженно-деформированного состояния конструкций учитывают большие упругие деформации и конечные вращения, поскольку геометрическая нелинейность играет существенную роль в поведении оболочки. Также важны и эффективные и надежные процедуры для численного моделирования оболочечных структур, поскольку небольшие изменения в геометрии и нагрузке оболочек могут привести к большим изменениям в механическом отклике. Таким образом, выбор подходящей математической модели вместе с последовательной и надежной вычислительной процедурой, которая может точно представлять нелинейные деформации и напряжения в оболочечных структурах, имеет большое значение.

Разработка процедур математического анализа оболочечных конструкций представляет, несомненно, одну из самых сложных задач исследования конечных элементов. Крупной и важной прикладной областью для анализа оболочек являются системы CAD/CAE.

Для многих математических моделей механики деформируемого твердого тела конечно-элементные процедуры высокого порядка предлагают множество теоретических и практических преимуществ по сравнению с конечно-элементными методами низкого порядка, которые в течение последних нескольких десятилетий

стали преобладать в научных исследованиях и коммерческом программном обеспечении. В частности, можно избежать различных форм заклинивания, которые без подходящей стабилизации часто портят конечно-элементные модели в слабой формулировке метода Галеркина для математических моделей упругих и неупругих твердых тел.

Существующие конечные и спектральные элементы высокого порядка основаны на иерархическом подходе и применяются к четырехугольной, а не к треугольной форме. Причина в том, что четырехугольная форма позволяет обеспечить простую реализацию функций формы и численного интегрирования в МКЭ. Однако четырехугольный элемент имеет некоторые недостатки. Например, он не может хорошо моделировать оболочечные конструкции произвольной формы (особенно с острыми углами), что затрудняет построение простой конечно элементной сетки. Треугольные элементы более приспособлены для построения сеток сложных форм оболочек. До сих пор было сделано сравнительно немного исследований по треугольным элементам высокого порядка. Эти исследования в основном сводятся к анализу свободных колебаний пластин и оболочек и используют модальный базисный подход.

В последние годы значительное внимание уделяется формулировкам конечных элементов оболочек, которые могут быть использованы с немодифицированными полностью трехмерными определяющими соотношениями. Мотивацией для разработки этих математических моделей является желание обойти многие проблемы, связанные с включением предположения о плоском напряженном состоянии. Такие формулировки учитывают растяжение по толщине и обеспечивают разумные представления всех компонентов напряжённого состояния с учетом его неоднородности по толщине для тонких и толстых оболочечных структур. Эти модели обычно называют 7-параметрическими формулировками, так как они включают в себя семь

независимых параметров в кинематическом описании. В 7-параметрической модели выражение, аппроксимирующее перемещение вдоль направляющего вектора, записывается с учетом квадратичного члена, что существенно ослабляет блокировку Пуассона при принятии трехмерных определяющих соотношений.

Таким образом, целями данной диссертационной работы являются

- разработка комплексной математической модели исследования напряженно-деформированного состояния оболочечного конечного элемента при механическом воздействии в рамках нелинейной теории упругости;

- модификация численных методов Симо и Фокса описания интерполяции направляющего вектора конечного оболочечного элемента с учетом геометрически точной процедуры обновления направляющего вектора для использования со спектральными интерполяционными функциями;

- разработка математической модели спектрального треугольного оболочечного элемента высокого порядка, который способен прогнозировать точные результаты напряжений в структурных задачах, подразумевающих высокие градиенты напряжений и особенности в граничных условиях и условиях нагружения;

- разработка алгоритма и программная реализация численных процедур на основе предложенной математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния оболочечного элемента при механическом воздействии в рамках нелинейной теории упругости.

**Научная новизна работы.** В работе впервые представлена математическая модель для исследования напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции с помощью треугольного спектрального оболочечного конечного элемента высокого порядка с учетом геометрически точной процедуры обновления направляющего вектора при конечных деформациях и неоднородности свойств

материала (композиты). На основе данной модели разработан алгоритм решения и программный модуль для его реализации.

**Результаты, выносимые на защиту.** Разработана комплексная математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние оболочки при конечных деформациях с учетом изменения толщины оболочечного элемента.

Модифицированы численные методы интерполяции направляющего вектора конечного оболочечного элемента с использованием спектральных интерполяционных функций.

Разработана новая математическая модель спектрального треугольного оболочечного конечного элемента высокого порядка с учетом геометрически точной процедуры обновления направляющего вектора.

Разработан алгоритм и программная реализация численных методов решения задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции с помощью спектрального треугольного конечного элемента.

**Достоверность результатов.** Достоверность результатов вытекает из корректности постановки задачи, обоснованного использования соотношений нелинейной теории упругости, применения известных численных методов. Результаты проведенных тестовых расчетов совпадают с аналитическими или с известными численными решениями.

**Практическая ценность работы.** Ценность работы состоит в создании программного модуля, с помощью которого можно решать задачи линейной и нелинейной теории упругости для оболочечных конструкций и твердых тел, покрытых оболочкой, используя конечные элементы высокого порядка. Полученные результаты в виде промышленного программного кода используются в пакете прочностного инженерного анализа Fidesys, лицензионная версия которого установлена на ряде предприятий.

**Апробация работы.** Основные положения диссертации обсуждались на следующих научных конференциях: «XII научно-техническая конференция молодых ученых, аспирантов, студентов», Новомосковск, 2010; «Ломоносовские чтения», Москва, 2009, 2012, 2017; Международная научная конференция «Современные проблемы механики, математики и информатики», Тула, 2010, 2011; XXI симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов», Москва, 2010; Международный молодежный форум «Ломоносов - 2011», Москва, 2011; X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Нижний Новгород, 2011; XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 13 работах, в том числе 4 статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Диссертация изложена на 124 страницах и содержит 31 рисунок. Список литературы включает 212 источников.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** приводится обоснование актуальности темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи данной работы, дано краткое изложение результатов по основным разделам.

**В первой главе** дан обзор литературы по использованию метода конечных элементов (МСЭ) и метода спектральных элементов (МКЭ). Дан обзор литературы по исследованию математических моделей оболочечных конструкций, а также обзор по использованию треугольных оболочечных элементов высокого порядка в рамках МСЭ.

Основываясь на степени полиномиальной базисной функции, используемой для аппроксимации поля переменных (перемещений, напряжений), существуют две

основные версии КЭ:  $h$ -версия ( $h$ -КЭ) и  $p$ -версия ( $p$ -КЭ). В  $h$ -КЭ степень полиномиальной базисной функции поддерживается низкой, и сетка уточняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решений. Для достаточно гладких задач на регулярных областях  $h$ -КЭ обладают алгебраической сходимостью к точному решению. Использование функций формы низкого порядка в некоторых задачах, связанных с особенностями и высокими градиентами напряжений, может приводить к ошибочным значениям в главном векторе напряжений. В качестве альтернативы можно использовать КЭ  $p$ -типа, где точность решения улучшается за счет увеличения полиномиального порядка функций формы элемента. Для достаточно гладких задач на регулярных областях элементы  $p$ -типа демонстрируют экспоненциальную сходимость.

Спектральные конечные элементы также являются  $p$ -КЭ, но их функции формы являются интерполяционными полиномами Лагранжа с узловыми точками Гаусса-Лобатто-Чебышева (GLC), либо на Гаусса-Лобатто-Лежандра (GLL). МСЭ был впервые предложен Патерой в контексте динамики флюидов. Идея, которая привела к его развитию, заключалась в том, чтобы объединить точность и быструю сходимость псевдоспектрального метода с геометрической гибкостью МКЭ. МСЭ имеет такое же поведение экспоненциальной сходимости, что и ПСМ, когда порядок интерполирующих многочленов  $N$  стремится к бесконечности.

Одной из основных трудностей, связанных с МСЭ, является то, что бывает очень сложно разбить сетку только на четырехугольники в 2-D или гексаэдры в 3-D. В этом отношении классический МКЭ, основанный на треугольниках в 2-D и на тетраэдрах в 3-D, является гораздо более гибким. Естественным расширением метода спектральных элементов до треугольников было бы использование точек GLL в каждом треугольнике. К сожалению, в общем случае неизвестно, существуют ли такие точки, и если да, то их построение численно оказывается чрезвычайно трудной задачей. Есть несколько особых случаев с низкой степенью,

но есть также степени, для которых известно, что таких квадратурных формул не существует.

Альтернативой точкам GLL в треугольнике является выбор точек, оптимизированных для интерполяции и аппроксимации, а не квадратуры. Для МСЭ точки Фекете являются лучшим выбором по сравнению с другими возможными точками интерполяции по следующим причинам:

- На  $[-1; 1]$  в 1-мерном случае, точками Фекете являются точки GLL.
- В последнее время было показано, что на квадрате тензорное произведение точек GLL является точками Фекете.
- Точки Фекете вдоль каждого края треугольника являются точками GLL. Таким образом, точки Фекете обеспечивают естественную связь с МСЭ на четырехугольниках.
- Точки Фекете имеют почти оптимальные интерполяционные свойства, а для степеней  $N > 9$  они являются лучшими точками интерполяции, известными для треугольника.

Для треугольника наиболее естественным и обычно используемым полиномиальным пространством является множество двумерных многочленов от  $\xi^1$  и  $\xi^2$  с полной степенью не выше  $N$ . Это пространство имеет размерность  $N_t = (N+1)(N+2)/2$ , и для построения интерполирующих полиномов нужно точно  $N_t$  точек. Для того чтобы иметь подходящий ортогональный базис в указанном пространстве, используются многочлены Дубинера.

**Во второй главе** изложен используемый в диссертации метод построения моделей для задач механики деформируемого твердого тела, основанный на записи уравнений и граничных условий для теории упругости при конечных деформациях. Записаны уравнения равновесия, приводятся кинематические соотношения этой теории, используемые при решении задач. Сформулирована вариационная постановка задачи расчета напряженно-деформированного состояния упругих

оболочечных тел для случая конечных деформаций. Приводятся формулы для описания функций формы треугольного оболочечного элемента.

Математическая постановка задачи включает в себя следующие соотношения:

— уравнения равновесия в текущем состоянии

$${}^{t+\Delta t}\nabla \cdot {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^b = 0 \quad (1)$$

— определяющие соотношения

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W({}_0^t\boldsymbol{\epsilon})}{\partial {}_0^t\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (2)$$

— граничные условия на границе  $\Gamma$  области  $D$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{n} \cdot {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \Big|_{t+\Delta t\Gamma} = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{t}}. \quad (3)$$

Здесь  ${}^{t+\Delta t}\nabla$  - оператор градиента в координатах текущего состояния;  $W(\boldsymbol{\epsilon})$  - упругий потенциал;  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^b$  — вектор массовых сил в текущем состоянии;  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{t}}$  - следящая нагрузка;  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{n}$  - нормаль к границе.

Решение задачи методом конечных элементов приводит к системе алгебраических уравнений. Если исходная краевая задача нелинейная, то полученная система также будет нелинейной. Перед численной дискретизацией с использованием метода конечных элементов, поставленная задача должна быть преобразована к виду обобщенной вариационной краевой задачи. Линеаризованная форма принципа виртуальных перемещений для уточненной формулировки Лагранжа одного элемента имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( \int_{{}^tV} C_{ijrs} \frac{\partial {}^t\epsilon_{rs}}{\partial {}^t a_k} \frac{\partial {}^t\epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} d{}^tV + \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij} \frac{\partial^2 {}^t\epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_k \partial {}^t a_l} d{}^tV \right) \delta a_l da_k = \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}_l - \left( \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij} \frac{\partial {}^t\epsilon_{ij}}{\partial {}^t a_l} d{}^tV \right) \delta a_l, \end{aligned} \quad (4)$$

где  ${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}_l$  - внешняя виртуальная работа, соответствующая  $\delta a_l$ ,  ${}^t a_k$  - любая из степеней свободы узла  $k$ .

Любой треугольник может быть линейно преобразован в стандартный треугольник  $T^2$ . Этот треугольник определен на локальном пространстве

$$T^2 = \left\{ (\xi^1, \xi^2) \mid 0 \leq \xi^1, \xi^2; \xi^1 + \xi^2 \leq 1 \right\}. \quad (5)$$

Базисные функции  $\varphi_i(\xi^1, \xi^2)$  представляют собой функции модифицированного треугольного базиса Дубинера.

Базис разделяется на внутренний, граничный и узловый:

– внутренний базис ( $0 \leq m < p-2$ ;  $0 \leq n < p-2-m$ )

$$\varphi_i(\xi^1, \xi^2) = \left( \frac{1+\xi^1}{2} \right) \left( \frac{1-\xi^1}{2} \right) P_m^{2,2}(\xi^1) \cdot \left( \frac{1-(\xi^1)^2}{2} \right)^{m+2} \left( \frac{1+(\xi^1)^2}{2} \right) P_n^{2m+5,2}(\xi^2), \quad (6)$$

– граничный базис ( $0 \leq m < p-1$ )

$$\varphi_1(\xi^1, \xi^2) = \left( \frac{1+\xi^1}{2} \right) \left( \frac{1-\xi^1}{2} \right) P_m^{2,2}(\xi^1) \left( \frac{1-\xi^2}{2} \right)^{m+2} \quad (7)$$

$$\varphi_2(\xi^1, \xi^2) = \left( \frac{1+\xi^1}{2} \right) \left( \frac{1-\xi^2}{2} \right) \left( \frac{1+\xi^2}{2} \right) P_m^{2,2}(\xi^2) \quad (8)$$

$$\varphi_3(\xi^1, \xi^2) = (-1)^m \left( \frac{1-\xi^1}{2} \right) \left( \frac{1-\xi^2}{2} \right) \left( \frac{1+\xi^2}{2} \right) P_{m-1}^{1,1}(\xi^2) \quad (9)$$

– базис в вершинах треугольника

$$\varphi_1(\xi^1, \xi^2) = \frac{1+\xi^2}{2}, \quad (10)$$

$$\varphi_2(\xi^1, \xi^2) = \left( \frac{1-\xi^1}{2} \right) \cdot \left( \frac{1-\xi^2}{2} \right), \quad (11)$$

$$\varphi_3(\xi^1, \xi^2) = \left( \frac{1+\xi^1}{2} \right) \left( \frac{1-\xi^2}{2} \right), \quad (12)$$

где  $P_k^{\alpha,\beta}(\xi)$  - полиномы Якоби степени  $k$ , определенные на интервале  $[-1,1]$ .

Квадратурная формула интегрирования Гаусса-Лежандра будет иметь вид

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi^1} f(\xi^1, \xi^2) d\xi^1 d\xi^2 \approx \sum_{i=1}^{N^p} w_i f(\eta_i^1, \eta_i^2) \quad (13)$$

где  $N^p = (p+1)(p+2)/2$  - количество точек интегрирования,  $w_i$  - вес, связанный с точкой  $\eta_i^1, \eta_i^2$ .

**В третьей главе** предлагается модель оболочечного элемента высокого порядка с геометрически точным описанием направляющего вектора. Формулировка элемента основана на 7-параметрической модели поля перемещений, позволяющей использовать полностью трехмерные определяющие соотношения [1].

Координаты узлов элемента  $\mathbf{X}^k$  даются в Декартовой системе координат с базисными векторами  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$

$$\mathbf{X}^k = X_i^k \mathbf{E}_i. \quad (14)$$

Для трехмерной геометрии оболочечного элемента  ${}^0\bar{\mathbf{B}}^e$  в начальном состоянии при толщине  ${}^0h$  положение частицы внутри элемента определяется как

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{x} &= \Phi^e(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \phi^e(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \frac{{}^0h}{2} \mathbf{V}_n = \\ &= \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \left( \mathbf{X}^k + \xi^3 \frac{h}{2} \mathbf{V}_n^k \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\xi^3 \in [-1;1]$ . На Рис. 1. схематично показан процесс аппроксимации трехмерной геометрии элемента  ${}^0\bar{\mathbf{B}}^e$ .

Ориентация направляющего вектора задается поворотами. На шаге с момента времени  $t$  до момента времени  $t + \Delta t$  для любого узла  $k$  направляющий вектор будет иметь вид

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_n^k = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^k \cdot {}^t \mathbf{V}_n^k, \quad (16)$$

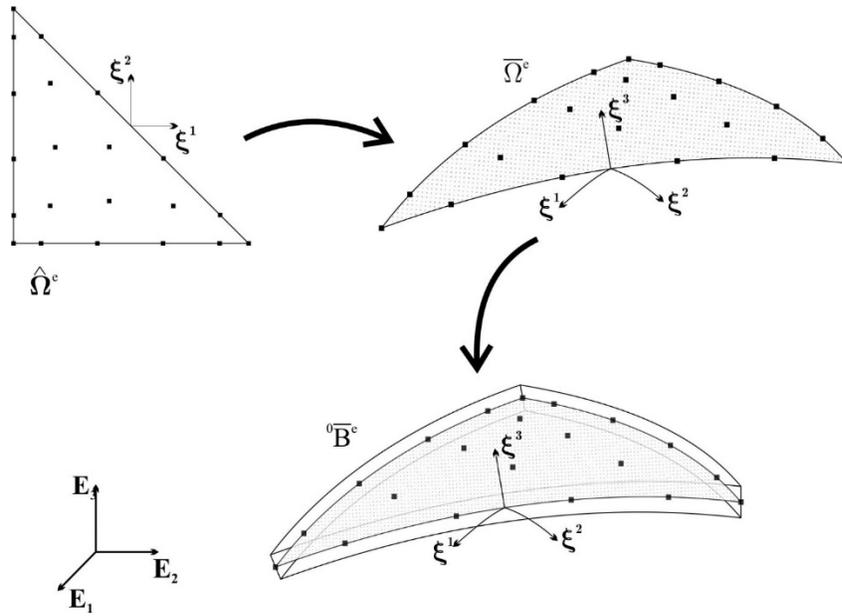


Рисунок 1. Процесс аппроксимации трехмерной геометрии оболочечного элемента в начальном состоянии.

где  ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}^k$  тензор поворота.

Тензор поворота  ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}^k$  в Декартовой системе координат в матричной форме будет иметь вид

$$\left[ {}^{t+\Delta t}_t R^k \right] = \left[ I_3 \right] + \frac{\sin(\theta^k)}{\theta^k} \left[ \Theta^k \right] + \frac{1 - \cos(\theta^k)}{(\theta^k)^2} \left[ \Theta^k \right]^2, \quad (17)$$

где

$$\theta^k = \sqrt{(\theta_1^k)^2 + (\theta_2^k)^2}; \quad \left[ \Theta^k \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_2^k \\ 0 & 0 & -\theta_1^k \\ -\theta_2^k & \theta_1^k & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[ I_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Рассмотрим движение оболочечного элемента из начального состояния  ${}^0\bar{\mathbf{B}}^e$  в текущее состояние  ${}^t\bar{\mathbf{B}}^e$ . Выражение для радиус-вектора точек элемента в деформированном состоянии в момент времени  $t$  будет иметь вид

$${}^t \mathbf{x} = {}^t \mathbf{X} + \frac{\xi^3}{2} {}^t h {}^t \mathbf{V}_n + (\xi^3)^2 {}^0 h {}^t Q_n {}^t \mathbf{V}_n, \quad (19)$$

Приращение перемещения записывается следующей формулой [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{x} - {}^t \mathbf{x} &= ({}^{t+\Delta t} \mathbf{X} - {}^t \mathbf{X}) + \frac{\xi^3}{2} ({}^{t+\Delta t} h {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_n - {}^t h {}^t \mathbf{V}_n) + \\ &+ (\xi^3)^2 {}^0 h ({}^{t+\Delta t} Q_n {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_n - {}^t Q_n {}^t \mathbf{V}_n). \end{aligned} \quad (20)$$

Это поле приращений перемещений может быть выражено в терминах степеней свободы в момент времени  $t$  с помощью следующих формул:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{X} - {}^t \mathbf{X} = \mathbf{u}_M = u \mathbf{E}_1 + v \mathbf{E}_2 + w \mathbf{E}_3, \quad (21a)$$

$${}^{t+\Delta t} h - {}^t h = {}^0 h \cdot \Delta_h, \quad (21б)$$

$${}^{t+\Delta t} Q_n - {}^t Q_n = q_n, \quad (21в)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} h {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_n - {}^t h {}^t \mathbf{V}_n &= ({}^t h + {}^0 h \cdot \Delta_h) [{}^{t+\Delta t} {}^t R] {}^t \mathbf{V}_n - {}^t h {}^t \mathbf{V}_n = \\ &= \left( {}^0 h \cdot \Delta_h [I_3] + ({}^t h + {}^0 h \cdot \Delta_h) \left( \frac{\sin(\theta^k)}{\theta^k} [\Theta^k] + \frac{1 - \cos(\theta^k)}{(\theta^k)^2} [\Theta^k]^2 \right) \right) {}^t \mathbf{V}_n, \end{aligned} \quad (21г)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} Q_n {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}_n - {}^t Q_n {}^t \mathbf{V}_n &= ({}^t Q_n + q_n) [{}^{t+\Delta t} {}^t R] {}^t \mathbf{V}_n - {}^t Q_n {}^t \mathbf{V}_n = \\ &= \left( q_n [I_3] + ({}^t Q_n + q_n) \left( \frac{\sin(\theta^k)}{\theta^k} [\Theta^k] + \frac{1 - \cos(\theta^k)}{(\theta^k)^2} [\Theta^k]^2 \right) \right) {}^t \mathbf{V}_n. \end{aligned} \quad (21д)$$

Здесь (21a) представляет собой три перемещения в глобальной Декартовой системе координат, (21б) описывает изменение толщины, а (21в) – приращения квадратичных перемещений. Формулы (21г)-(21д) представляют собой модификацию геометрически точного описания приращения направляющего вектора.

Геометрически точное описание приращения направляющего вектора дали Симо и Фокс для использования в процедуре обновления направляющего вектора на каждой итерации решения для конечных элементов низкого порядка. Также это описание позволяет получить более точный тангенциальный оператор, необходимый при решении нелинейных систем методом Ньютона. Направляющий

вектор в формулировке Симо для точки интегрирования рассчитывался с использованием аппроксимации приращений компонент тензора поворота

$$\theta_1 = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \theta_1^k, \quad \theta_2 = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \theta_2^k, \quad (22)$$

что приводило к нелинейным соотношениям как относительно узловых поворотных степеней свобод, так и относительно координат  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Такая интерполяция была необходима в виду того, что в точках интегрирования по элементу, которые отличны от узловых, интерполяция направляющего вектора из узловых направляющих векторов может сильно отличаться от направляющего вектора, рассчитанного от интерполяции компонент тензора поворота. Поскольку в представленном спектральном элементе узловые точки совпадают с квадратурными, то для аппроксимации направляющего вектора можно использовать более простую формулу

$$\mathbf{V}_n = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \mathbf{V}_n^k. \quad (23)$$

Итоговые приращения перемещений будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \mathbf{u}_M^k + \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \left( \frac{\xi^3}{2} {}^0h \cdot \Delta_h^k + (\xi^3)^2 {}^0h q_n^k \right) {}^t \mathbf{V}_n^k + \\ & + \frac{\xi^3}{2} \sum_{k=1}^N \left( \varphi_k(\xi^1, \xi^2) ({}^t h^k + {}^0h \cdot \Delta_h^k) \left( \frac{\sin(\theta^k)}{\theta^k} [\Theta^k] + \frac{1 - \cos(\theta^k)}{(\theta^k)^2} [\Theta^k]^2 \right) {}^t \mathbf{V}_n^k \right) + \\ & + (\xi^3)^2 {}^0h \sum_{k=1}^N \left( \varphi_k(\xi^1, \xi^2) ({}^t Q_n^k + q_n^k) \left( \frac{\sin(\theta^k)}{\theta^k} [\Theta^k] + \frac{1 - \cos(\theta^k)}{(\theta^k)^2} [\Theta^k]^2 \right) {}^t \mathbf{V}_n^k \right) \quad (24) \end{aligned}$$

В современной технике применяемые в качестве конструктивных элементов оболочки в большинстве своем естественно или конструктивно анизотропны. Большинство анизотропных оболочек еще и слоисты. Слоистые композитные материалы состоят из двух и более материалов, обладающих вместе желательными

свойствами, которые не проявляются при использовании этих материалов по отдельности. Важным классом анизотропных тел являются ортотропные тела с тремя плоскостями упругой симметрии. В таком случае тензор упругости  $\mathbb{C}$  в матричном виде имеет вид:

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_z & -\nu_{yz}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (25)$$

Рассмотрим один слой ламинатной оболочки, который представляет собой ортотропный материал с главными направлениями упругости  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ . В каждом узле элемента  $\bar{\Omega}^e$  необходимо определить единичный вектор  $\hat{\mathbf{t}}^k$ , направленный по касательной к средней поверхности элемента. Эти вектора используются для определения непрерывного касательного векторного поля в  $\bar{\Omega}^{hp}$ . Внутри элемента  $\bar{\Omega}^e$  касательное поле представляется с использованием стандартной интерполяционной формулы

$$\hat{\mathbf{t}} = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\xi^1, \xi^2) \hat{\mathbf{t}}^k \quad (26)$$

Касательный вектор  $\hat{\mathbf{t}}$  задается так, чтобы легко построить локальный ортогональный базис  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ .

Для многослойных композитов сначала определяется единичный касательный вектор  $\hat{\mathbf{t}}$  вместе с набором углов ориентации  $\hat{\theta} = \left\{ \hat{\theta}^1, \dots, \hat{\theta}^{N_L} \right\}$ , связанных с каждым слоем, где  $N_L$  - общее количество слоев. Каждый слой в композите нумеруется в порядке от нижнего слоя к верхнему. В пределах  $q$ -го слоя

получаем локальные базисные векторы  $\{\hat{\mathbf{e}}_1^q, \hat{\mathbf{e}}_2^q, \hat{\mathbf{e}}_3^q\}$ . Как только локальные базисные векторы известны, мы можем определить компоненты  $C_{ijkl}$  по всему  $q$ -му слою, используя уравнение

$$C_{ijkl} = T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq} \bar{C}_{mnpq}, \quad (27)$$

где компоненты  $T_{ij}$  определяются формулой

$$T_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i^q \cdot \mathbf{E}_j \quad (28)$$

Такой подход к заданию слоев оболочечного материала позволил решить задачу о возникновении дефекта в предварительно нагруженном теле. В [4] приводится решение задачи о напряженно-деформированном состоянии в окрестности сферической полости, образованной в толстостенном цилиндре. Для случая, когда стенки цилиндра тонкие, полый цилиндр можно смоделировать оболочечными элементами. При этом область дефекта с некой окрестностью вокруг дефекта моделируется в виде ламинатной оболочки со слоями, состоящими из одинакового для всех слоев материала. Для элементов, моделирующих дефект, центральный слой ламината удаляется, образуя полость. Варьируя толщину верхнего и нижнего слоев можно менять расположение дефекта внутри оболочечного элемента. Решение сравнивалось с решением трехмерными элементами, полученным с помощью программного модуля из [4]. Было получено совпадение по главным напряжениям при одинаковых радиусах кривизны поверхности полого тонкостенного цилиндра.

**В четвертой главе** приводятся алгоритмы, реализующие решение поставленной задачи о расчете напряженно-деформированного состояния оболочечного тела с учетом конечности деформаций, рассматриваются результаты численного решения задач, методы решения которых даны в предыдущих главах.

Производится сравнение результатов расчетов спектральным элементом с расчетами при помощи объемных конечных элементов низкого порядка.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию глобальной системы во времени, в общем виде записывается как

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = \{F\}. \quad (29)$$

Некоторые методы программной реализации рассматриваемой математической модели могут быть легко включены в параллельную вычислительную среду на основе OpenMP. Основой процесса адаптации программного кода метода конечных элементов для эффективного параллельного выполнения в системах с общей памятью является способность собирать глобальную разреженную матрицу коэффициентов быстро, эффективно и в форме, которая подходит для связи с современными библиотеками решателей разреженных матриц, таких как PARDISO, MUMPS и др.

До глобальной сборки уравнения для определенного конечного элемента не зависят от уравнений, связанных с любым другим элементом. В результате операции построения и применения граничных условий к матрицам элемента  $[K^e]$ ,  $[M^e]$ ,  $[C^e]$  и  $\{F^e\}$  могут быть легко выполнены в параллельной вычислительной среде. Укрупненный алгоритм распараллеливания для программной реализации рассматриваемой модели КЭ состоит из следующих основных шагов:

1. Цикл по всем элементам  $e = 1, \dots, N^e$  (параллельно),
  - построение  $[K^e]$ ,  $[M^e]$ ,  $[C^e]$  и  $\{F^e\}$ ,
  - добавление локальных матриц в глобальные  $[K]$ ,  $[C]$ ,  $[M]$ ,
  - добавление локального вектора нагрузок в глобальный вектор  $\{F\}$ ,
  - применение граничных условий.
2. Сжатие глобальных матриц  $[K]$ ,  $[C]$ ,  $[M]$  в формат CSR (параллельно).

3. Решение глобальной системы уравнений с использованием соответствующей библиотеки решателей.

4. Расчет и сохранение деформаций и напряжений на текущей итерации (параллельно).

5. Вывод результатов в файл.

Разработанный программный модуль позволяет перестраивать исходную конечно-элементную сетку 1-го или 2-го порядка в сетку из спектральных элементов необходимого порядка. Для перестроения лучше использовать начальную сетку 2-го порядка, поскольку для определения положения новых узлов в пространстве используются функции формы оригинальных элементов.

Алгоритм построения конечно-элементной сетки из спектральных элементов состоит из следующих шагов:

1. Проверка порядка спектральных элементов. Если он совпадает с порядком элементов начальной сетки, то геометрия элементов просто копируется и процесс перестроения завершается.

2. Цикл по всем элементам  $e = 1, \dots, N^e$

– для  $e > 1$  проверяется, есть ли у этого элемента общие точки с уже перестроенными элементами;

– если общие точки есть, то порядковые номера этих точек копируются в элемент  $e$ ;

– остальные точки добавляются в общий список узлов путем подстановки координат точек спектрального оболочечного элемента в уравнение, описывающее среднюю поверхность элемента начальной сетки;

– заполняются списки узлов для сегментов и поверхностей элементов.

3. Преобразование граничных и начальных условий под новую сетку. Для граничных и начальных условий, заданных на каких-либо сегментах или

поверхностях элементов целиком, добавляются новые точки, чтобы после преобразования эти условия задавались на новых сегментах и поверхностях.

4. Завершение перестроения сетки, перенос получившихся массивов данных в расчетное ядро.

Если необходимо выполнить расчет на прочность конструкции, состоящей из элементов разного типа (например, трехмерные тела и оболочки), то возникает проблема корректного моделирования соединения таких элементов конструкций. Допустим, требуется выполнить расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции сложной структуры. Одним из вариантов является замена некритических областей элементами, по свойствам практически точно повторяющими свойства части конструкции, но требующими меньших вычислительных мощностей. Проблемы начинают возникать, когда мы пытаемся соединить элементы с разным количеством степеней свободы.

В данной диссертационной работе предлагается усовершенствовать подход, предложенный в [3] и моделировать соединение спектральными оболочечными элементами с изменяемой толщиной. Для части конструкции, состоящей из трехмерных элементов, место соединения разбивается на тетраэдральную КЭ сетку из спектральных элементов. На поверхности соединения узлы этой сетки будут совпадать с узлами сетки из спектральных треугольных оболочечных элементов. Само соединение представляет собой тонкую оболочку, лежащую на поверхности трехмерного тела и состоящую из того же материала, что и трехмерное тело. Далее к соединению добавляется остальная часть конструкции, состоящая из оболочечных элементов. Использование данного метода позволит более точно моделировать объекты сложной структуры при меньшей затрате процессорного времени и памяти по сравнению с подходом, когда все элементы конструкции моделируются трехмерными телами.

Рассматривается численное решение задачи об изгибе свободно опертой круглой оболочки с круглым отверстием в центре перерезывающими силами  $Q$ , равномерно распределенными по внутреннему контуру. Задача решается в линейной постановке при  $a = 2$ ,  $b = 0.7$ ,  $h = 0.05$ ,  $Q = 10^{-3}$ ,  $E = 1.2 \cdot 10^6$ ,  $\nu = 0.3$ . Сравниваются решения элементом МІТС6 и спектральными треугольными элементами разных порядков. В таблице 1 представлена разница между аналитическим и полученным численным решением в точке  $(0.7, 0, 0)$ .

Таблица 1. Разница между аналитическим и численным решением.

МІТС6	Количество элементов	Порядок элемента	$ w(r) - \hat{w}^e  /  w(r) $
	645	2	$1.145 \cdot 10^{-3}$
	1347	2	$8.31 \cdot 10^{-4}$
	2261	2	$7.06 \cdot 10^{-4}$
	2777	2	$6.49 \cdot 10^{-4}$
Спектральный элемент	123	5	$4.3 \cdot 10^{-5}$
	123	7	$4 \cdot 10^{-5}$

Показано, что при приблизительно одинаковом количестве степеней свободы решение, полученное при использовании спектрального элемента выше 5-го порядка, получается на порядок точнее, чем при использовании обычных конечных элементов 2-го порядка.

Рассматривается применение треугольного спектрального конечного элемента для численного решения динамической задачи об определении НДС оболочечной конструкции при зависящей от времени нагрузке. Модель, представленная на рис. 2., представляет собой пластину с закрепленными на ней пятью коробками. Угловые узлы пластины соединены с помощью жестких балок с центральным узлом, отстоящим от пластины на 0.2 м. Конечно-элементная сетка

представляет собой 770 треугольных спектральных оболочечных элемента 4-го порядка.

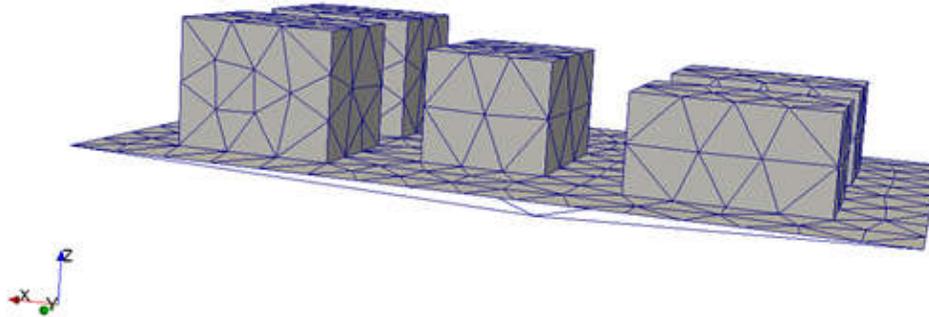


Рисунок 2. Геометрия задачи с сеткой из спектральных элементов

Размеры пластины 1.5x2.5 м, толщина 0.005 м. Сечение балок – круг радиуса 0.05 м. Материал пластины:  $E = 10^{12}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 700$  кг/м<sup>3</sup>. Материал коробок:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 400$  кг/м<sup>3</sup>. Материал балок:  $E = 2 \cdot 10^{15}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 10^{-10}$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение, заданное таблично, прикладывается к центральному узлу.

Приводятся графики зависимости перемещений и ускорений от времени. Полученные графики перемещений центрального узла и некоторых узлов коробок совпадают с расчетом в пакете Ansys с использованием 6000 конечных элементов 1-го порядка. Использование спектрального элемента высокого порядка позволяет сократить количество элементов в расчетной задаче без потери качества расчета. При этом время на расчет затрачивается меньше за счет того, что программная реализация спектрального элемента лучше распараллеливается, а матрица масс получается диагональной.

Рассматривается задача о деформации цилиндра с открытым контуром, растягиваемого двумя точечными силами  $P$  (рис. 3.).

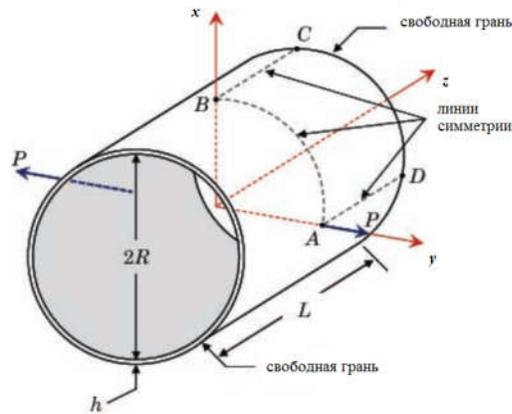


Рисунок 3. Геометрия цилиндрической оболочки с открытым концом

Длина цилиндра равна  $L = 10.35$ , расстояние от оси  $z$  до средней поверхности равно  $R = 4.953$ , толщина оболочки  $h = 0.094$ . Материал оболочки – изотропный, с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона равными  $E = 1.05 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0.3125$ . КЭ-сетка  $1/8$  части исходной геометрии состоит из 10 спектральных треугольников 6 порядка. В итерационном процессе Ньютона используется 20 шагов нагружения. Приводятся радиальные перемещения в зависимости от приложенной силы  $P$ . Показаны недеформированная и различные деформированные конфигурации средней поверхности (рис. 4.).

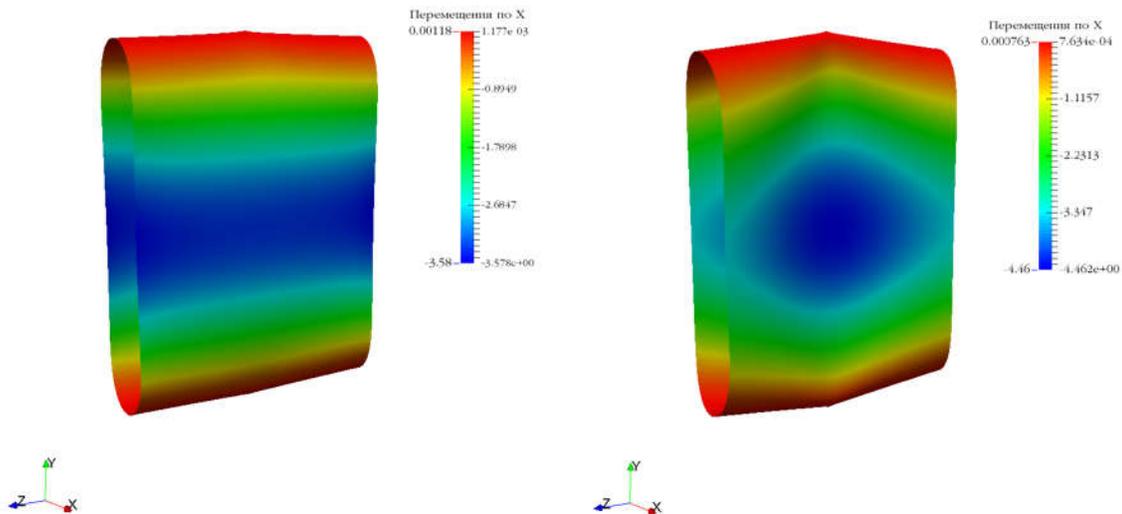


Рисунок 4. Десятый и двадцатый шаги нагружения цилиндрической оболочки

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Разработана комплексная математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние оболочки при конечных деформациях с учетом изменения толщины оболочечного элемента.

Разработан спектральный оболочечный элемент высокого порядка, свободный от различных форм заклинивания.

Модифицирована модель геометрически точного описания направляющего вектора оболочечного элемента для использования со спектральными интерполяционными функциями

Разработан алгоритм решения задач об определении напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции с помощью спектрального треугольного элемента.

На основе алгоритма решения задач об определении НДС оболочечной конструкции разработан программный модуль с возможностью интеграции в САЕ Fidesys.

Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность использования 7-параметрической модели для оболочечного элемента высокого порядка. Проведено сравнение с решениями для известных оболочечных и трехмерных элементов.

Разработанную математическую модель спектрального оболочечного элемента можно модифицировать для учета поворота вокруг направляющего вектора.

Разработанный программный модуль можно использовать в промышленной реализации для прочностных инженерных расчетов конструкций, состоящих из оболочек, балок и трехмерных тел.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации из списка ВАК

1. Petrovskiy K.A., Vershinin A.V., Levin V.A. Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. — P. 012077 (база цитирования Scopus)

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012077>

2. Петровский К.А., Привалов А.Н. О программной реализации метода спектрального оболочечного конечного элемента для решения динамической задачи // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 9. Ч.1. С. 158-168.

3. Петровский К.А., Хлуденев А.В. Вариант моделирования соединения балочных и оболочечных элементов конструкции с трехмерными телами в системе прочностного анализа Фидесис // «Вестник Тверского государственного университета», серия «Прикладная математика», Вып. 4, Тверь, 2012. С. 65-70.

4. Петровский К.А. О развитии дефекта в нагруженном толстостенном полем цилиндре. Конечные деформации. // «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского», №4. Часть 4. Н. Новгород: Издательство ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. С. 1697 – 1698.

### Остальные публикации

5. Петровский К.А., Коновалов Д.А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции при конечных деформациях с учетом изменения толщины оболочечного элемента // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.). Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. С. 222.

6. Петровский К.А. Развитие дефекта в нагруженном полом цилиндре // «XII научно-техническая конференция молодых ученых, аспирантов, студентов. Тезисы докладов. Часть II», Новомосковск, 2010. С. 111.

7. Левин В.А., Фрейман Е.И., Петровский К.А. Модель, алгоритм и численная реализация твердотельных фазовых переходов в материале с наноразмерными неоднородностями. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 2010. С. 172-175.

8. Левин В.А., Зингерман К.М., Фрейман Е.И., Петровский К.А. К решению связанных задач механики деформированного твердого тела с помощью САЕ "Fidesys" на примере задач о твердотельных фазовых переходах // Двадцать первый симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов», Т. 2, Москва, 2010. С. 30-33.

9. Фрейман Е.И., Петровский К.А. К решению одной задачи с нестационарным изменением наноструктуры при образовании дефектов. Конечные деформации. // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2011», [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

10. Левин В.А., Петровский К.А. Вариант вязкого роста дефекта в эластомере. Решение с использованием САЕ FIDESYS. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 2011. С. 144-145.

11. Левин В.А., Петровский К.А. Моделирование с использованием САЕ Фидесис образования концентратора напряжений в тонкостенном цилиндре, прилегающем к упругому полупространству // «Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики», Москва, МГУ, 2012.

12. Левин В.А., Вершинин А.В., Мишин И.А., Сбойчаков А.М. Петровский К.А. Распространение упругих волн в нелинейно-упругих средах с начальными деформациями. Компьютерное моделирование с использованием программного комплекса прочностного инженерного анализа FIDESYS // Технологии сейсморазведки». Новосибирск, 2012. № 4. С. 29-32.

13. Петровский К.А., Вершинин А.В., Левин В.А. О применении метода спектральных элементов для моделирования тонкостенных конструкций при конечных деформациях и промышленная реализация в пакете «Фидесис» // «Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики», Москва, МГУ, 2017.